Exercice 1 (2 points) :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

0,5 a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

0,75 b) Ecrire v_n en fonction de n et en séduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 (5 points) :

0,75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

2) On pose : $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

0,75 a) Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel

0,5 b) Soit le nombre complexe $b = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Prouver que $b^2 = a$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M4 d'affixe z'

0,25 a) Vérifier que : $z' = bz$

0,5 b) Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R

0 ,75 4) a) Montrer que : $|a - b| = |b - c|$ et en déduire la nature du triangle ABC

0,5 b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

5) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par T

0,25 a) Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$

0,75 b) Montrer que : $\frac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les point O , B et D sont alignés

Exercice 3 (4 points) :

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}$

0,5 1) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = \frac{(e^x - 1)^2 + 2}{e^x}$

0,25 b) Poser le tableau de variations de la fonction u (sans calcul de limite)

0,5 c) En déduire le signe de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (remarquer $u(0) = 0$)

2) Soit la fonction v définie sur $\mathbb{R}$ par : $v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$

0,5 a) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $v(x) = e^{x}u(x)$

0,5 b) En déduire le signe de la fonction v sur $\mathbb{R}$

0,5 3) a) Montrer que la fonction w définie par : $w(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (4-2x)e^{x} - 3x$ est une primitive de la fonction v sur $\mathbb{R}$

0,5 b) Calculer l'intégrale : $\int_0^2 v(x)dx$

0,75 c) Montrer que $\frac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction w sur $\mathbb{R}$

Problème (9 points) :

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$

0,5 1) Montrer que : $g'(x) < 0$, pour tout $x \in]0,+\infty[$

0,5 2) Déduire le tableau de signe de g(x) sur l'intervalle $]0,+\infty[$; (remarquer que g(1) = 0)

II. On considère la fonction numérique f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)$$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ (unité : 2 cm)

0,5 1) Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

0,5 2) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0,75 b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement

1 3) a) Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$

0,75 b) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0,1]$ et sur $[2,+\infty[$ et croissante sur $[1,2]$

0,25 c) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$, (on admet $f(2) \approx 1{,}25$)

0,5 4) Sachant que $f(3) \approx 0{,}5$ et $f(4) \approx -1{,}9$ montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3,4[$

1 5) Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

III. On pose : $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de l'intervalle $[1,2]$

x	1	2
h(x)	0	h(x)

0,5 1) a) A partir du tableau de variations de la fonction h ci-contre Montrer que $f(x) \le x$ pour tout x de $[1,2]$

0,25 b) Montrer que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1,2]$

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(x)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,75 a) Montrer par récurrence que : $1 \le u_n \le 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

0,75 c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$